第10講　総合問題(2)

1　自然数 n に対して，a_n と b_n を

$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1}，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$a_n^2 - 2b_n^2$ を求めよ．

(3)　(2)を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を 1 つ求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関係式 $x^a = y^b = z^c = xyz$ を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 (x, y, z) が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ．
ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　A，B，C の 3 人が，それぞれさいころを振り，出た目の大きい順に順位を決めるものとする．ただし，同じ目が出た場合は同順位とする．たとえば，A と B が 5 を出し C が 3 なら，A と B が 1 位で C は 3 位とする．A が 5 を出し B と C が 3 なら，A が 1 位で B と C は 2 位とする．また，A も B も C も 5 を出せば，3 人とも 1 位とする．以下の問いに答えよ．

(1)　1 位，2 位，3 位が，すべて単独で決まる確率を求めよ．

(2)　A が 1 位となる確率を求めよ．

(3)　A と B の少なくとも一方が 1 位となる確率を求めよ．

(4)　単独で 1 位なら 4 点，2 人で 1 位なら 3 点，3 人で 1 位なら 2 点，単独で 2 位なら 2 点，2 人で 2 位なら 1 点，3 位なら 0 点が与えられる場合，A の得点の期待値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題 (2)

1　自然数 n に対して，a_n と b_n を

$$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n\geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1}，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$a_n{}^2-2b_n{}^2$ を求めよ．

(3)　(2)を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を 1 つ求めよ．

$n=1$ のとき　$3+2\sqrt{2}=a_1+b_1\sqrt{2}$　a_1，b_1 は自然数すなわち有理数より　$a_1=3, b_1=2$

(1)　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n+b_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n=(3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1}$$
$$=(3+2\sqrt{2})(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{2})$$
$$=(3a_{n-1}+4b_{n-1})+(2a_{n-1}+3b_{n-1})\sqrt{2}$$

よって　$\begin{cases}\boldsymbol{a_n=3a_{n-1}+4b_{n-1}}\\ \boldsymbol{b_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}}\end{cases}$

(2)　$a_n{}^2-2b_n{}^2=(3a_{n-1}+4b_{n-1})^2-2(2a_{n-1}+3b_{n-1})^2=a_{n-1}{}^2-2b_{n-1}{}^2$

よって　$a_n{}^2-2b_n{}^2=a_1{}^2-2b_1{}^2=\boldsymbol{1}$

(3)　$a_n{}^2-2b_n{}^2=1$　より　$(a_n+\sqrt{2}\,b_n)(a_n-\sqrt{2}\,b_n)=1$

$$a_n-\sqrt{2}\,b_n=\frac{1}{a_n+\sqrt{2}\,b_n}$$

よって　$\dfrac{a_n}{b_n}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{b_n(a_n+\sqrt{2}\,b_n)}$

ここで，$2>1.96$ より，$\sqrt{2}>1.4$

(1)より　$a_2=17$，$b_2=12$

$$b_2(a_2+\sqrt{2}\,b_2)>12(17+1.4\times 12)=405.6$$

よって　$\dfrac{a_2}{b_2}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{405.6}$

$a_3=99$，$b_3=70$

$$b_3(a_3+\sqrt{2}\,b_3)>70(99+1.4\times 70)=13790$$

よって　$\dfrac{a_3}{b_3}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{13790}<\dfrac{1}{10000}$

したがって，求める有理数の 1 つは

$$\frac{a_3}{b_3}=\boldsymbol{\frac{99}{70}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関係式 $x^a=y^b=z^c=xyz$ を満たす1とは異なる3つの正の実数の組 (x, y, z) が，少なくとも1組存在するような，正の整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ．ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする．

$x^a=y^b=z^c=xyz=k$ とおく．（k は実数）

$x=k^{\frac{1}{a}}$, $y=k^{\frac{1}{b}}$, $z=k^{\frac{1}{c}}$

また　$xyz=k$ より　$k^{\frac{1}{a}}\cdot k^{\frac{1}{b}}\cdot k^{\frac{1}{c}}=k$　よって　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$　……①

$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}$　より　$1 \leqq \frac{3}{a}$　よって　$a \leqq 3$

$a=1$ は明らかに①を満たさず不適.

$a=2$ のとき

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}$$

よって　$b \leqq 4$　$a \leqq b$ より　$2 \leqq b \leqq 4$

$b=2$ は明らかに不適.

$b=3$ のとき　$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$　　よって　$c=6$

$b=4$ のとき　$c=4$

$a=3$ のとき

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}$$

$\frac{2}{3}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}$　　よって　$b \leqq 3$ より　$b=3$　　このとき　$c=3$

以上より　$(a, b, c)=$**(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)**

3　A，B，Cの3人が，それぞれさいころを振り，出た目の大きい順に順位を決めるものとする．ただし，同じ目が出た場合は同順位とする．たとえば，AとBが5を出しCが3なら，AとBが1位でCは3位とする．Aが5を出しBとCが3なら，Aが1位でBとCは2位とする．また, AもBもCも5を出せば, 3人とも1位とする．以下の問いに答えよ．

(1)　1位，2位，3位が，すべて単独で決まる確率を求めよ．

(2)　Aが1位となる確率を求めよ．

(3)　AとBの少なくとも一方が1位となる確率を求めよ．

(4)　単独で1位なら4点，2人で1位なら3点，3人で1位なら2点，単独で2位なら2点，2人で2位なら1点，3位なら0点が与えられる場合，Aの得点の期待値を求めよ．

(1)　A，B，Cがすべて異なる目を出すときである．よって求める確率は $\frac{{}_6P_3}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{9}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

⑵　A が k の目を出したとき，A が 1 位となる確率を A_k とする.

このとき，B，C は k 以下の目である.

したがって　$A_k=\dfrac{k^2}{6^3}$　　よって，求める確率は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}A_k=\frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot6\cdot7\cdot13=\boldsymbol{\frac{91}{216}}$

⑶　B が 1 位になる確率は⑵より $\dfrac{91}{216}$ である .

A と B が 1 位になるのは，A，B が k の目を出したときに，C が k 以下の目であるときであるから，その確率は

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6^3}=\frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot7=\frac{7}{72}$$　よって，求める確率は　$\dfrac{91}{216}+\dfrac{91}{216}-\dfrac{7}{72}=\boldsymbol{\dfrac{161}{216}}$

⑷　A の得点を X とする.

$X=4$ となるのは，A が単独 1 位となるときである.

それは A が k の目を出したときに，B，C が $k-1$ 以下の目であるときであり，その確率は

$$\frac{1}{6^3}\sum_{k=1}^{6}(k-1)^2=\frac{1}{6^3}\sum_{i=1}^{5}i^2=\frac{55}{216}$$

$X=3$ となるのは，A が 1 位で，かつ B か C の一方が 1 位（もう一方は 3 位）のときであり，その確率は

$$\frac{1}{6^3}\sum_{k=1}^{6}{}_2\mathrm{C}_1(k-1)=\frac{2}{6^3}\sum_{i=1}^{5}i=\frac{5}{36}=\frac{30}{216}$$

$X=2$ となるのは次の場合

・3 人が 1 位のときで，その確率は

$$\frac{6}{6^3}=\frac{6}{216}$$

・A が単独 2 位のときであり，

1 位の人の目は $k+1$ 以上の $6-(k+1)+1=6-k$（通り）

3 位の人の目は $k-1$（通り）

よって，その確率は　$\displaystyle\frac{1}{6^3}\sum_{k=1}^{6}{}_2\mathrm{C}_1(6-k)(k-1)=\frac{40}{216}$

以上より　$\dfrac{6}{216}+\dfrac{40}{216}=\dfrac{46}{216}$

$X=1$ となるのは，A が 2 位で，かつ B か C の一方が 2 位（もう一方は 1 位）のとき.

その確率は　$\displaystyle\frac{1}{6^3}\sum_{k=1}^{6}{}_2\mathrm{C}_1(6-k)=\frac{2}{6^3}\sum_{i=1}^{5}i=\frac{30}{216}$

よって，求める期待値は

$$E(A)=4\cdot\frac{55}{216}+3\cdot\frac{30}{216}+2\cdot\frac{46}{216}+1\cdot\frac{30}{216}=\boldsymbol{2}\text{（点）}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　(1)　自然数 a，b は，$1<a<b$ および $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{5}{3}$ を満たす．a，b の組をすべて求めよ．

(2)　自然数 a，b，c は，$1<a<b<c$ および $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{12}{5}$ を満たす．a，b，c の組をすべて求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　ある袋に 10 と書かれた 2 枚のカードと 5 と書かれた 3 枚のカードが入っている．この袋の中をよくかきまぜてから，カードを取り出す．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　この袋からカードを 2 枚取り出すとき，カードに書かれた数の合計の期待値を求めよ．

(2)　最初に，この袋からカードを 2 枚取り出す．2 枚のカードに書かれた数が異なる場合には，次もそのまま続けて 3 枚目のカードを取り出す．一方，初めに取り出したカードに書かれた数が同じ場合には，そのうちの 1 枚のカードを袋に戻した後に，3 枚目のカードを取り出すことにする．このとき，袋に戻したカードも含めて，取り出した 3 枚のカードに書かれていた数の合計の期待値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 (1)　自然数 a, b は，$1<a<b$ および $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{5}{3}$ を満たす．a, b の組をすべて求めよ．

(2)　自然数 a, b, c は，$1<a<b<c$ および $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{12}{5}$ を満たす．a, b, c の組をすべて求めよ．

解答例

(1)　$a\geqq4$ のとき，自然数 a, b が $a<b$ を満たすことより $b\geqq5$

このとき，$1+\dfrac{1}{a}\leqq\dfrac{5}{4}$，$1+\dfrac{1}{b}\leqq\dfrac{6}{5}$ より　$\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\leqq\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{3}$

よって $a\geqq4$ は題意を満たすことはなく不適．

したがって，$a=2$，3 に限られる．

$a=2$ のとき　$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{5}{3}$　　より　$b=9$

$a=3$ のとき　$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{5}{3}$　　より　$b=4$

以上より，求める a, b の組は　$(a,\ b)=(2,\ 9)$，$(3,\ 4)$

(2)　$a\geqq4$ のとき，$b\geqq5$，$c\geqq6$

このとき，$1+\dfrac{1}{a}\leqq\dfrac{5}{4}$, $1+\dfrac{1}{b}\leqq\dfrac{6}{5}$, $1+\dfrac{1}{c}\leqq\dfrac{7}{6}$ より

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\leqq\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{4}<\frac{12}{5}$$

よって $a\geqq4$ は題意を満たすことはなく不適．

したがって，$a=2$，3 に限られる．

$a=2$ のとき　$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{12}{5}$　　$\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{8}{5}$

$b\geqq4$ のとき(1)と同様に明らかに不適．

よって，$b=3$ に限られ，このとき $c=5$

$a=3$ のとき　$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{12}{5}$　　$\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{9}{5}$

$b\geqq4$ のとき(1)と同様に明らかに不適．よって題意を満たす b は存在しない．

以上より，求める a, b, c の組は　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 5)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　ある袋に 10 と書かれた 2 枚のカードと 5 と書かれた 3 枚のカードが入っている．この袋の中をよくかきまぜてから，カードを取り出す．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　この袋からカードを 2 枚取り出すとき，カードに書かれた数の合計の期待値を求めよ．

(2)　最初に，この袋からカードを 2 枚取り出す．2 枚のカードに書かれた数が異なる場合には，次もそのまま続けて 3 枚目のカードを取り出す．一方，初めに取り出したカードに書かれた数が同じ場合には，そのうちの 1 枚のカードを袋に戻した後に，3 枚目のカードを取り出すことにする．このとき，袋に戻したカードも含めて，取り出した 3 枚のカードに書かれていた数の合計の期待値を求めよ．

解答例

(1)　カードを 2 枚取り出すとき，カードに書かれた数の合計値は 10, 15, 20 のいずれかである．

10 となる確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$　　15 となる確率は $\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{5}$

20 となる確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$　　よって，求める期待値は $10\cdot\dfrac{3}{10}+15\cdot\dfrac{3}{5}+20\cdot\dfrac{1}{10}=14$

(2)　この試行を終えたとき，カードに書かれた数の合計値は 15，20，25，30 のいずれかである．

15 となるのは，3 枚のカードの数がすべて 5 のときである．すなわち，最初に取り出した 2 枚がともに 5 であり，このうち 1 枚を戻し次に取り出したカードが 5 の場合である．

その確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_1}{{}_4C_1}=\dfrac{3}{20}$

20 となるのは，3 枚のカードの数が 5，5，10 のときである．すなわち，次の場合．

・最初に取り出した 2 枚が 5，10 で，次に取り出したカードが 5

・最初に取り出した 2 枚がともに 5 で，このうち 1 枚を戻し，次に取り出したカードが 10

その確率は $\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_1}{{}_3C_1}+\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_1}{{}_4C_1}=\dfrac{11}{20}$

25 となるのは，3 枚のカードの数が 5，10，10 のときである．すなわち，次の場合．

・最初に取り出した 2 枚が 5，10 で，次に取り出したカードが 10

・最初に取り出した 2 枚がともに 10 で，このうち 1 枚を戻し，次に取り出したカードが 5

その確率は $\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{1}{{}_3C_1}+\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_1}{{}_4C_1}=\dfrac{11}{40}$

30 となるのは，3 枚のカードの数が 10，10，10 のときである．すなわち，最初に取り出した 2 枚がともに 10 であり，このうち 1 枚を戻し次に取り出したカードが 10 の場合である．

その確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\cdot\dfrac{1}{{}_4C_1}=\dfrac{1}{40}$

以上より，求める期待値は $15\cdot\dfrac{3}{20}+20\cdot\dfrac{11}{20}+25\cdot\dfrac{11}{40}+30\cdot\dfrac{1}{40}=\mathbf{\dfrac{167}{8}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。